

Chapitre : Analyse Combinatoire et Dénombrement

Cours Complet, Méthodologie Visuelle & Exercices Corrigés

Préparé pour le cours magistral & TD

OUSSAMA EL BAKRAOUI

Plan du Cours

- 1 Introduction et Approche Visuelle
- 2 Principes Fondamentaux du Dénombrement
- 3 Permutations (Sans et Avec Répétition)
- 4 Arrangements (Sans et Avec Répétition)
- 5 Combinaisons (Sans et Avec Répétition)
- 6 Formule du Binôme de Newton
- 7 Tableau Récapitulatif (Arbre de décision)
- 8 Travaux Dirigés & Exercices d'Examens Corrigés

Qu'est-ce que l'analyse combinatoire ?

L'**analyse combinatoire** est un synonyme de **dénombrement**. Elle s'emploie à étudier et à dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis (née de l'étude des jeux de hasard et du calcul des probabilités).

L'idée visuelle fondamentale (Schéma mental) :



- **Arrangement** : Placer parmi n objets dans p places **avec ordre** (on les classe).
- **Permutation** : Ordonner la totalité des n objets ($p = n$).
- **Combinaison** : Choisir un sous-ensemble de p objets parmi n **sans ordre**.

1.1 Principe de Multiplication (Règle du « ET »)

Principe de multiplication

Si une situation comporte p étapes offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$ possibilités, alors le nombre total d'issues est :

$$\text{Nombre total d'issues} = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$$

Autrement dit, si une opération A peut être exécutée de m façons, et si pour chacun de ces cas, une opération B peut être effectuée de n façons, alors il y a $m \times n$ façons d'effectuer les deux opérations.

Corollaire (Produit cartésien)

Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont p ensembles de cardinal fini, le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_p$ est l'ensemble des p -uplets $(e_1, \dots, e_p)$ et :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_p)$$

Exemples d'application du Principe de Multiplication

1. **Code secret** : Un code comporte 2 lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien de codes distincts ?
 - 3 étapes : 1^{ère} lettre (26 choix), 2^{ème} lettre (25 choix), chiffre (9 choix). Total = $26 \times 25 \times 9 = 5850$ codes.
2. **Communauté** : 10 hommes ont chacun 3 fils. On désigne un « père et fils exemplaires ».
 - Choix du père (10) $\times$ choix du fils (3) = $10 \times 3 = 30$ choix possibles.
3. **Deux prix** : Distribuer 2 prix différents parmi 10 enfants (un enfant peut recevoir les deux).
 - 1^{er} prix (10) $\times$ 2nd prix (10) = $10 \times 10 = 100$ façons.
4. **Comité de la FST** : Constitué de 3 étudiants de 1^{ère} année, 4 de 2^{ème} année, 5 de 3^{ème} année et 2 de Master. On forme un sous-comité de 4 étudiants (1 représentant par classe).
 - Nombre de sous-comités = $3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120$.
5. **Plaques matricules (7 caractères : 3 lettres suivies de 4 chiffres)** :
 - Avec répétition : $26^3 \times 10^4 = 175\,760\,000$ plaques.
 - Sans répétition : $(26 \times 25 \times 24) \times (10 \times 9 \times 8 \times 7) = 78\,624\,000$ plaques.

I.2 Principe d'Addition (Règle du « OU »)

Principe d'addition

Si deux opérations A et B sont **mutuellement exclusives** (la réalisation de l'une empêche la réalisation de l'autre, i.e. $A \cap B = \emptyset$), et s'il y a m façons de réaliser A et n façons de réaliser B , alors il y a :

$$\text{Nombre de façons de réaliser } (A \text{ ou } B) = m + n$$

Exemple : Partage de 3 livres

De combien de manières peut-on partager 3 livres différents (L_1, L_2, L_3) entre deux personnes si l'on doit attribuer **au moins un livre** à chacune d'elles ?

Opération A : (1 livre à la 1^{ère}, 2 à la 2^{ème})

- L_1 | L_2, L_3
- L_2 | L_1, L_3
- L_3 | L_1, L_2

$\Rightarrow m = 3$ façons.

Opération B : (2 livres à la 1^{ère}, 1 à la 2^{ème})

- L_1, L_2 | L_3
- L_1, L_3 | L_2
- L_2, L_3 | L_1

$\Rightarrow n = 3$ façons.

Les cas A et B étant disjoints, il y a au total $3 + 3 = 6$ façons.

II.1 Permutations sans répétition

Définition & Théorème

Soit E un ensemble à n éléments. Une **permutation** de E (de n objets distincts) est un échantillon ordonné sans répétition de E tout entier. Le nombre de permutations de n objets est :

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n \quad (\text{avec par convention } 0! = 1)$$

Exemples du cours

1. Le nombre de permutations de $\{0, 1, 2, 3\}$ est $4! = 24$.
2. Placer une équipe de basket de 9 joueurs : $9! = 362\,880$ ordres possibles.
3. Nombres formés avec $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (sans répétition) commençant par 7 et divisibles par 5 :
 - Commence par 7 (1 choix), se termine par 0 ou 5 (2 choix), et on permute les 6 chiffres restants ($6!$)
 $\implies 2 \times 6! = 1440$.
4. Classement d'un examen suivi par 6 hommes et 4 femmes (sans ex-aequo) :
 - a) **Classement global** : $10! = 3\,628\,800$ classements.
 - b) **Hommes classés entre eux et femmes entre elles** : $2 \times 6! \times 4! = 34\,560$ classements.

II.2 Permutations avec répétition partielle

Définition & Théorème

Soit E un ensemble à n éléments comportant :

- n_1 éléments d'un 1^{er} type, indiscernables entre eux,
- n_2 éléments d'un 2nd type, indiscernables entre eux, ..., n_k éléments d'un $k^{\text{ième}}$ type ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$).

Une disposition ordonnée de ces n éléments est notée $\text{EOR}(n, n_1, \dots, n_k)$. Leur nombre est :

$$P_{n, n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

Exemples classiques

1. **Anagrammes de S-E-M-E-E-S** : 6 lettres au total, dont 3 'E', 2 'S', et 1 'M'.

$$P_{6,3,2,1} = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = 60 \text{ mots possibles.}$$

2. **Mots avec A B B C A D B** : $\text{EOR}(7, 2, 2, 1) \rightarrow P_{7,2,2,1} = \frac{7!}{2! \times 2! \times 1!} = 420 \text{ mots}$

III.1 Arrangements sans répétition (Sans remise)

Définition & Théorème

Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$. Un **arrangement sans répétition** de p éléments parmi n est un **échantillon ordonné sans répétition** noté $EO\overline{R}(p, n)$.

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (p \leq n)$$

Preuve : 1^{er} tirage : n façons ; 2^{ème} tirage : $(n-1)$ façons ; ... ; $p^{\text{ème}}$ tirage : $(n-p+1)$ façons.

Remarque : Pour $p = n$, on retrouve la permutation $A_n^n = n!$.

Exemples types (Tirage successif sans remise)

1. **Urne :** Tirer successivement 2 boules parmi 3 sans remise $\rightarrow EO\overline{R}(2, 3) \implies A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$.
2. **Course :** Nombre de podiums (3 places) parmi 8 athlètes $\rightarrow A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$.
3. **Cirque :** Répartir 3 tigres sur 5 socles $\rightarrow EO\overline{R}(3, 5) \implies A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$ façons.

III.2 Arrangements avec répétition (Avec remise)

Définition & Théorème

Soit E un ensemble à n éléments. Un **arrangement avec répétition** de p éléments choisis parmi n est un **échantillon ordonné avec répétition** noté $EOR(p, n)$.

$$\overline{A}_n^p = n^p$$

(Attention : ici p peut être supérieur à n !)

Preuve : À chaque tirage (de 1 jusqu'à p), on remet l'élément, donc on dispose toujours de n choix :
 $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p.$

Exemples types (Tirage successif avec remise)

1. **Pièce de monnaie :** On lance 3 fois une pièce (Pile ou Face). Chaque suite est un $EOR(3, 2)$: il y a $2^3 = 8$ suites possibles.
2. **Boules avec remise :** On tire successivement 4 boules numérotées parmi 20 avec remise. Chaque résultat est un $EOR(4, 20) \implies 20^4$ résultats possibles.

IV.1 Combinaisons sans répétition (Tirage simultané)

Définition & Théorème

Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$. Une **combinaison sans répétition** de p éléments parmi n est un **échantillon non ordonné sans répétition** (un sous-ensemble) noté $\overline{EOR}(p, n)$.

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés fondamentales :

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
- $C_n^p = 0$ si $p > n$
- **Symétrie** : $C_n^p = C_n^{n-p}$
- **Relation de Pascal** : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Exemples types :

- Tirer **simultanément** 6 boules parmi 10 :
 $\overline{EOR}(6, 10) \implies C_{10}^6 = 210$.
- Former un comité de 3 personnes parmi 20 :
 $\overline{EOR}(3, 20) \implies C_{20}^3 = 1140$ comités.

IV.2 Combinaisons avec répétition & Décomposition $D(p, n)$

Définition & Bijection avec les équations entières

Une **combinaison avec répétition** de p objets pris parmi n types d'objets distincts (sans ordre et avec répétition), notée $E\overline{O}R(p, n)$, revient à choisir k_1 fois l'objet x_1 , k_2 fois l'objet x_2 , $\dots$, k_n fois l'objet x_n . Cela correspond exactement à une **décomposition de p en n parties**, notée $D(p, n)$:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \dots + k_n = p \\ 0 \leq k_i \leq p \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\}) \end{cases}$$

Théorème fondamental

Le nombre de combinaisons avec répétition $E\overline{O}R(p, n)$ (ou nombre de solutions de $k_1 + \dots + k_n = p$ dans $\mathbb{N}$) est :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = C_{n+p-1}^{n-1}$$

Idée de la preuve (Méthode des séparateurs) :

$$\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k_1} \mid \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{k_2} \mid \dots \mid \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{k_n}$$

Exemples de Combinaisons avec Répétition

Exemple 1 : Nombres à 2 chiffres ordonnés

Combien de nombres à 2 chiffres peut-on former avec $\{1, 3, 5\}$ tels que $\frac{\text{dizaines}}{\text{unités}} \leq 1$ (c.-à-d. dizaines $\leq$ unités) ?

- La contrainte annule l'ordre (ex : 13 est accepté mais 31 est exclu) et la répétition est permise (11, 33, 55).
- C'est un $E\overline{O}R(2, 3) \implies K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$ nombres : (11, 13, 15, 33, 35, 55).

Exemple 2 : Dérivées partielles

Soit $f(x, y)$ une fonction à $n = 2$ variables de classe $\mathcal{C}^3$. Quel est le nombre de dérivées partielles d'ordre $p = 3$?

- Par le théorème de Schwarz, l'ordre de dérivation n'importe pas : $K_2^3 = C_{2+3-1}^3 = C_4^3 = 4$.

V. Binôme de Newton et Sommes Classiques

Théorème (Binôme de Newton)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i$$

Exemple : $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Astuces classiques pour les TD et Examens (Dérivation)

En posant $f(x) = (1 + x)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i$:

1. **Pour** $x = 1$: $\sum_{i=0}^n C_n^i = (1 + 1)^n = 2^n$ (Nombre de parties d'un ensemble à n éléments).

2. **En dérivant une fois** ($f'(x)$) **puis** $x = 1$: $\sum_{i=1}^n i C_n^i = n 2^{n-1}$.

Comment choisir la bonne formule le jour de l'examen ?

Type d'échantillon / Mots-clés	Ordre ?	Répétition ?	Notation Cours
Tirage successif sans remise ($p \leq n$)	OUI	NON	$E\overline{O}R(p, n)$
Tirage successif avec remise	OUI	OUI	$EOR(p, n)$
Classer tous les n objets distincts ($p = n$)	OUI	NON	Permutation
Anagrammes / Objets indiscernables par groupes	OUI	Partielle	$E\overline{O}R(n, n_1, \dots, n_k)$
Tirage simultané / Sous-ensemble / Comité	NON	NON	$E\overline{O}R(p, n)$
Objets indiscernables dans boîtes / $x_1 + \dots + x_n = p$	NON	OUI	$E\overline{O}R(p, n)$ ou $D(p, n)$

Exercice 1 (TD) : Classement de films

Énoncé

5 films discernables sont classés (notés) de 1 à 10. Donner le nombre de classements :

1. Au total.
2. Sachant que le film 2 a la note 4.
3. Sachant que la note 1 a été attribuée exactement 1 fois.
4. Sachant que la note 1 a été attribuée exactement 2 fois.

Solution détaillée

1. Chaque classement est un $EOR(5, 10) \implies 10^5$ classements.
2. Le film 2 étant fixé à la note 4, il suffit de classer les 4 films restants parmi 10 notes $\implies 10^4$.
3. Il y a C_5^1 façons de choisir le film qui reçoit la note 1, puis 9^4 façons d'affecter des notes parmi $\{2, \dots, 10\}$ aux 4 films restants $\implies C_5^1 \times 9^4 = 5 \times 9^4$.
4. Il y a C_5^2 façons de choisir les 2 films qui reçoivent la note 1, et 9^3 façons de noter les 3 films restants $\implies C_5^2 \times 9^3$.

Exercice 2 (TD) : Lancers d'une pièce et Événement Contraire

Énoncé

On lance une pièce de monnaie 5 fois de suite et on note dans l'ordre l'apparition de PILE (P) ou FACE (F). Donner le nombre de suites : 1) Au total 2) Comportant 2 PILE exactement 3) Au moins 2 PILE 4) Au moins un PILE et un FACE.

Solution détaillée

1. Échantillon ordonné avec répétition $EOR(5, 2) \implies \text{Card}(\Omega) = 2^5 = 32$.
2. Il suffit de choisir 2 places (pour les 2 PILE) parmi les 5 lancers $\implies C_5^2 = 10$.
3. Soit $A = \{\text{au moins 2 PILE}\}$. Son complémentaire est $\bar{A} = \{0 \text{ PILE ou } 1 \text{ PILE}\}$.

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\bar{A}) = 2^5 - C_5^0 - C_5^1 = 32 - 1 - 5 = 26.$$

4. Soit $B = \{\text{au moins 1 PILE et 1 FACE}\}$. Alors $\bar{B} = \{0 \text{ PILE (tout F) ou } 0 \text{ FACE (tout P)}\}$.

$$\text{Card}(B) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\bar{B}) = 2^5 - 2 = 30.$$

Exercice 3 (TD) : Placement de n familles sur $4n$ chaises

Énoncé

On place sur $4n$ chaises en ligne un groupe de n familles
(1 famille = 1 homme H + 1 femme F + 1 garçon g + 1 fille f). Nombre de dispositions :

Solution (Questions 1 à 6)

1. **Au total** : Permutation de $4n$ éléments $\implies (4n)!$ dispositions.
2. **Membres d'une même famille côte à côte** $\{H_1 F_1 g_1 f_1\} \dots \{H_n F_n g_n f_n\}$: $n!$ pour permuter les n familles, et $(4!)$ pour chaque famille $\implies n!(4!)^n$.
3. **Sans séparer les couples** $(H_i F_i)$: On a n blocs couples et $2n$ enfants (soit $3n$ entités).
 $\implies C_{3n}^n 2^n n! (2n)! = (3n)! 2^n$.
4. **Familles regroupées ET couples non séparés** $\{(H_1 F_1) g_1 f_1\} \dots$: $n!$ (familles) $\times (3!)^n$ (le couple + 2 enfants par famille) $\times 2^n$ (au sein du couple) $\implies n! 6^n 2^n$.
5. **Alternance des sexes** ($2n$ personnes de sexe masculin et $2n$ de sexe féminin) : Deux schémas ($HFHF \dots$ ou $FHFH \dots$) $\implies 2((2n)!)^2$.
6. **Familles regroupées ET alternance des sexes** : $2(n!) 4^n$.

Exercice 5 (TD) : Affectation d'enseignants indiscernables

Énoncé

20 enseignants **indiscernables** sont affectés à 4 écoles **discernables**. Soit x_i le nombre d'enseignants dans l'école i ($x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$).

Solution détaillée

- Au total** : Décomposition de 20 en 4 $\implies K_4^{20} = C_{20+4-1}^{20} = C_{23}^{20}$.
- L'école 2 reçoit exactement 3 enseignants** ($x_2 = 3$) :
 $x_1 + x_3 + x_4 = 17 \implies D(17, 3) \implies K_3^{17} = C_{19}^{17}$.
- Chaque école reçoit au moins 2 enseignants** ($x_i \geq 2$) : On pose
 $y_i = x_i - 2 \geq 0 \implies y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20 - 8 = 12 \implies K_4^{12} = C_{15}^{12}$.
- Écoles 1 et 2 (resp. 3 et 4) reçoivent le même nombre** ($x_1 = x_2$ et $x_3 = x_4$) :
 $2x_1 + 2x_3 = 20 \iff x_1 + x_3 = 10 \implies K_2^{10} = C_{11}^{10} = 11$.
- Chaque école reçoit un nombre impair** ($x_i = 2y_i + 1$ avec $y_i \geq 0$) :
 $2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 4 = 20 \iff y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8 \implies K_4^8 = C_{11}^8$.
- Au moins 2 enseignants ET nombre impair** ($x_i = 2y_i + 1 \geq 3 \implies y_i \geq 1$) : On pose

Exercice 6 (Examen CC1) : Problème de la fleuriste

Énoncé (CC1)

Une fleuriste a 100 fleurs rouges, 100 fleurs blanches et 100 fleurs jaunes d'apparence identique.

1. Combien de sortes de bouquets de 100 fleurs pourra-t-elle confectionner ?
2. Même question si le nombre de fleurs rouges est divisible par 10 et celui des blanches divisible par 5 ?
3. Combien de sortes de bouquets de 101 fleurs pourra-t-elle confectionner ?

Solution détaillée

1. $x_r + x_b + x_j = 100$ avec $0 \leq x_r, x_b, x_j \leq 100 \implies K_3^{100} = C_{100+3-1}^{100} = C_{102}^{100}$.
2. On pose $x_r = 10x'_r$ et $x_b = 5x'_b \implies 10x'_r + 5x'_b + x_j = 100$:
 - **Cas 1** ($x'_b = 2x''_b$ pair et $x_j = 10x'_j$) : $x'_r + x''_b + x'_j = 10 \implies K_3^{10} = C_{12}^{10}$.
 - **Cas 2** ($x'_b = 2x''_b + 1$ impair et $x_j = 10x'_j + 5$) : $x'_r + x''_b + x'_j = 9 \implies K_3^9 = C_{11}^9$.
 - **Total** : $K_3^{10} + K_3^9 = C_{12}^{10} + C_{11}^9$.
3. On cherche $x_r + x_b + x_j = 101$ sous la contrainte $0 \leq x_r, x_b, x_j \leq 100$:
 - En utilisant la méthode du cours (disjonction selon les variables nulles ou ≥ 1) : $100 C_3^1 + C_{100}^{98}$ (ou en